MECÁNICA COMPUTACIONAL I

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones

Capitulo 3

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

Introducción

Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

Eliminación de Gauss

Eliminación de Gauss-Jordan.

Determinación de la matriz inversa.

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de las sustituciones sucesivas

Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de Newton-Raphson.

Muchos problemas se expresan como un sistema de n ecuaciones simultáneas con n variables

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0\\
&f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0\\
&.....\\
&f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

En el caso general, estas ecuaciones son no lineales. El sistema (1) se simplifica grandemente si las ecuaciones son lineales, pudiendo escribirse

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2\\
&.......\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

De manera mas concisa (2) se escribe como

$$[A]\{x\}=\{b\} \tag{3}$$

ó, menos formalmente,

$$Ax=b$$

donde A, x y b son expresados como

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Introducción

Aunque es posible resolver estos sistemas de manera analítica, cuando el número de ecuaciones o la cantidad de veces que hay que hallar la solución es grande, la solución analítica es poco práctica.

Si el error de redondeo es despreciable, estos sistemas pueden ser resueltos numéricamente de manera exacta. Para ello se utilizan dos tipos de métodos: directos e iterativos.

Los métodos directos se utilizan cuando el número de ecuaciones no es muy grande (típicamente 40 o menos).

Los métodos iterativos se utilizan tanto para un gran número de ecuaciones (generalmente mas de 100) ó cuando la matriz A tiene ciertas características.

Antes de iniciar el estudio de estos métodos es conveniente revisar algunos conceptos básicos del álgebra matricial.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales:
método de las sustituciones sucesivas

2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales:
método de Newton-Raphson.

Matriz mxn: arreglo del tipo

$$A = a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Si las dimensiones lo permiten tendremos:

Suma:

$$A = B + C = b_{ij} + c_{ij} \tag{6}$$

Diferencia:

$$A = B - C = b_{ij} - c_{ij} \tag{7}$$

Producto:

$$F = AB = f_{ij} \qquad f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{8}$$

Propiedades:

$$A(B + C) = AB + AC \tag{9}$$
$$(B + C)D = BD + CD$$

En general

$$AB \neq BA \tag{10}$$

Si

$$AB = BA$$

entonces A y B *conmutan*.

Matriz *nula*:

$$a_{ij} = 0, \forall i,\ j \qquad (11)$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad A(B + C) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 37 \end{bmatrix} \qquad (B + C)A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 5 & 6 & 5 \\ 23 & 32 & 12 \end{bmatrix}$$

Si

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Entonces,

$$A^2=\begin{bmatrix}11 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 14 & 14 & 7\end{bmatrix} \quad AB=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 11\\ 1 & 1 & 4\\ 11 & 7 & 18\end{bmatrix} \quad BA=\begin{bmatrix}16 & 9 & 7\\ 7 & -7 & 0\\ 13 & 11 & 6\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 5 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A+B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Sea

$$\overline{A} = \overline{a}_{ij}$$

la matriz *compleja conjugada* de A. Entonces se cumple que

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{12a}$$

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B} \tag{12b}$$

La matriz *traspuesta* de A se define como

$$A^t = \left(g_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \tag{13}$$

Se verifica además que

$$\left(A+B\right)^t = A^t + B^t \tag{14a}$$

$$\left(ABC\right)^t = C^t B^t A^t \tag{14b}$$

Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

La matriz *traspuesta conjugada* de A es

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^t = \left(\overline{A^t}\right) \qquad (15)$$

verificandose que

$$\left(AB\right)^* = B^* A^* \qquad (16)$$

Una matriz es *Hermitiana* si y solo si

$$A^* = A \qquad (17)$$

Una matriz es *simétrica* si

$$A = A^t \qquad (18)$$

Una matriz real es Hermitiana si y solo si es simétrica.

Ejemplos:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & -2-i & -1+3i \\ i & -3+2i & 2 \\ 3-2i & 1+i & -1+i \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-i & -2+i & -1-3i \\ -i & -3-2i & 2 \\ 3+2i & 1-i & -1-i \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}^t = \begin{bmatrix} 2-i & -i & 3+2i \\ -2+i & -3-2i & 1-i \\ -1-3i & 2 & -1-i \end{bmatrix}$$

Una matriz H es *diagonal* si es n x n y verifica que

$$h_{ij} \neq 0 \rightarrow i = j \qquad (19)$$

$$h_{ij} = 0 \rightarrow i \neq j$$

Una matriz H es *escalar* si y solo si H es diagonal y

$$h_{ii} = h_i = h \qquad (20)$$

La matriz identidad I se define como aquella que es escalar con

$$i_{ii} = i_i = i = 1 \qquad (21)$$

cumpliendose que

$$IA = AI = A \qquad (22)$$

Si la matriz A es cuadrada se define la matriz *inversa* de A, a la matriz K, que cumple que

$$AK = KA = I \tag{23}$$

Esta matriz se denota como K=A^{-1}.

La matriz A es *no singular* si su inversa existe.

Si las matrices inversas de A y B (del mismo orden) existen, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{24}$$

Una matriz cuadrada es *unitaria* si y solo si

$$A^{*} = A^{-1} \tag{25}$$

Una matriz cuadrada es *ortogonal* si y solo si

$$A^{*} = A^{-1} = A^{t} \tag{26}$$

Ejemplo: Si la matriz A se define como

$$A = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{15} & (3-i)/\sqrt{15} & i/\sqrt{15} \\ (1-i)/\sqrt{5} & i/\sqrt{5} & (1-i)/\sqrt{5} \\ 5i/\sqrt{3} & (1-3i)/\sqrt{3} & (2-6i)/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

entonces se cumple que

$$A^* A = I$$

y, en consecuencia A es unitaria.

Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

La diagonal principal de una matriz de orden n esta constituida por los elementos

$$a_{ii} \,/\, 1 \leq i \leq n$$

Si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero, A es una matriz *triangular superior*. Si además, todos los elementos de la diagonal también son nulos A es una matriz *triangular superior estricta*.

De manera similar se definen las matrices *triangular inferior* y *triangular inferior estricta*.

El determinante de una matriz cuadrada de define como

$$\det(A) = |A| = \sum \mathrm{sgn}(p_1 p_2 \ldots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} \tag{27}$$

donde cada producto incluye uno y solo un número de cada fila y columna y la suma se extiende sobre todas las posibles permutaciones $p_1p_2 \ldots p_n$. Además, $\mathrm{sgn}(p_1p_2 \ldots p_n)$ es 1 o -1 dependiendo de la cantidad de permutaciones necesarias para transformar la secuencia a su orden “natural”. Si el número de permutaciones es impar entonces sgn es 1 y si es par sgn será -1.

132 -> par 1342 -> impar

Algunas propiedades útiles son:

$$\det(A^t) = \det(A) \tag{28a}$$

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A) \tag{28b}$$

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)} \tag{28c}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{28d}$$

$$\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} \tag{28e}$$

Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

Un vector puede ser definido como una matriz nx1.

El producto escalar entre dos vectores u y v se define como

$$(u,v)=u^*v$$

Ejemplo: para n=3 y

$$u=\begin{bmatrix}2+3i\\3-i\\4+i\end{bmatrix}\qquad v=\begin{bmatrix}1+i\\1-i\\2\end{bmatrix}\qquad (u,v)=\begin{bmatrix}2-3i & 3+i & 4-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i\\1-i\\2\end{bmatrix}$$

$$(u,v)=(2-3i)(1+i)+(3+i)(1-i)+(4-i)2$$

$$(u,v)=17-5i$$

Una matriz elemental nxn de *primer tipo* es obtenida reemplazando el i-ésimo elemento de la diagonal de la matriz identidad nxn por una constante no nula

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

Una matriz elemental nxn de *segundo tipo* es obtenida intercambiando dos filas de la matriz identidad nxn

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Una matriz elemental nxn de *tercer tipo* es obtenida insertando un elemento no nulo fuera de la diagonal de la matriz identidad nxn

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

La multiplicación de una matriz arbitraria A (nxp) por las matrices elementales produce una transformación elemental sobre A. Por ejemplo, si A y Q son dadas por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto QA lleva a

$$QA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & q & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ qa_{21} & qa_{22} & qa_{23} & qa_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$$

la multiplicación de la i-ésima (2 en este caso) fila de A por q.

Si R es dado por (2<-->3)

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

el producto RA lleva a

$$RA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{bmatrix}$$

que corresponde al intercambio de filas.

Si S es dada por (s colocado en i=2,j=3)

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & s\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

el producto SA lleva a

$$SA=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&s\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

$$SA=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}+sa_{31}&a_{22}+sa_{32}&a_{23}+sa_{33}&a_{24}+sa_{34}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

que añade a la segunda fila (i en general) el producto de la constante s por la tercera fila (j en general).

Si la matriz obtenida luego de estos productos por matrices elementales se denomina como T; T y A se dicen que son matrices equivalentes. En ese caso tenemos que

$$\det(QA) = \det(Q)\det(A) = q\det(A) \qquad (32a)$$

$$\det(RA) = \det(R)\det(A) = -\det(A) \qquad (32b)$$

$$\det(SA) = \det(S)\det(A) = \det(A) \qquad (32c)$$

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de las sustituciones sucesivas

2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de Newton-Raphson.

Eliminación de Gauss

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales se explica fácilmente con un ejemplo. Supongamos que deseamos resolver el sistema

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = 4 \\
E_2 &: \; 2x_1 + x_2 - \; x_3 + \; x_4 = 1 \\
E_3 &: \; 3x_1 - x_2 - \; x_3 + 2x_4 = -3 \\
E_4 &: -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \; x_4 = 4
\end{aligned}
$$

Realizando las operaciones, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(E_2 - 2E_1) &\rightarrow (E_2) \\
(E_3 - 3E_1) &\rightarrow (E_3) \\
(E_4 + E_1) &\rightarrow (E_4)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = 4 \\
E_2 &: \qquad - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\
E_3 &: \qquad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15 \\
E_4 &: \qquad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8
\end{aligned}
$$

Eliminación de Gauss

Usamos ahora E_2 para eliminar x_2 de E_3 y E_4. Para ello hacemos

$$(E_3 - 4E_2) \to (E_3)$$
$$(E_4 + 3E_2) \to (E_4)$$

para obtener

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_4 = 4 \\ E_2 &: \quad - x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ E_3 &: \quad -4x_2 - x_3 - 7x_4 = -15 \\ E_4 &: \quad 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_4 &= 4 \\ - x_2 - x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 3x_3 + 13x_4 &= 13 \\ -13x_4 &= -13 \end{aligned}$$

Eliminación de Gauss

Este sistema puede resolverse por sustitución hacia atrás :

$$x_4 = \frac{-13}{-13} = 1$$

$$x_3 = \left(13 - 13x_4\right)/\,3 = 0$$

$$x_2 = 7 - x_3 - 5x_4 = 7 - 0 - 5(1) = 2$$

$$x_1 = 4 - x_2 - 3x_4 = 4 - 2 - 3(1) = -1$$

El procedimiento anterior se simplifica utilizando notación matricial. Para ello construimos la matriz ampliada y operamos directamente sobre los coeficientes de la misma.

Eliminación de Gauss

En el caso del sistema anterior escribimos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

y realizamos las operaciones sobre las filas de la matriz, para obtener en cada paso las matrices

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \text{ y } \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

En el caso general, el sistema lineal

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

se expresa utilizando las matrices A y b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss

para escribir la matriz ampliada

$$\overline{A} = [A,b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

El primer paso consiste en "eliminar" el coeficiente de la primera columna en las ecuaciones 2...n. Para ello cada fila E_j se transforma de manera que

$$\left[E_j - \left(\frac{a_{j1}}{a_{11}}\right)E_1\right] \to (E_j) \qquad j = 2,3,\ldots,n \qquad a_{11} \neq 0$$

Eliminación de Gauss

La matriz ampliada se escribe ahora como

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

en la que, en general, todos los coeficientes de las filas (j>=2) han sido modificados (para simplificar, las primas serán eliminadas en lo que sigue). El paso siguiente corresponde a modificar la matriz de manera que

$$\left[E_j - \left(\frac{a_{j2}}{a_{22}}\right)E_2\right] \to (E_j) \qquad j = 3,4,\dots,n$$

$$a_{22} \neq 0$$

Eliminación de Gauss

quedando la matriz ampliada expresada como

$$\overline{A}=\left[A,b\right]=\left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

El procedimiento continúa de manera que, en el paso i-ésimo utilizamos

$$\left[E_j-\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)E_i\right]\to\left(E_j\right) \qquad \begin{array}{l} j=i+1,i+2,\dots,n \\ a_{ii}\neq 0 \end{array}$$

para llegar a la matriz triangular

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Resolviendo directamente la n-ésima ecuación

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

La incógnita que sigue se obtiene de

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

De manera semejante obtenemos que cada incógnita se obtiene de

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

escribiendo

$$b_i = a_{i,n+1}$$

tendremos, a efectos de la programación

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Eliminación de Gauss

El punto débil de este método es la necesidad de garantizar que en cada paso el pivote $a_{kk} \neq 0$.

En ese paso, podemos sin embargo intercambiar ecuaciones escogiendo una ecuación l, con l>k de manera que el elemento de la columna k de E_l no sea nulo.

Ejemplo, partiendo del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

Realizamos las operaciones

$$\left(E_2 - 2E_1\right) \to \left(E_2\right)$$
$$\left(E_3 - E_1\right) \to \left(E_3\right)$$
$$\left(E_4 - E_1\right) \to \left(E_4\right)$$

Para pasar de a

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Pivote

Eliminación de Gauss

El proceso se detiene ya que a_{22} es nulo y la operación

$$\left[E_j - \left(\frac{a_{j2}}{a_{22}}\right)E_2\right] \to (E_j) \qquad j = 3,4 \qquad a_{22} = 0$$

no puede ser realizada.

Sin embargo, E_3 puede ser intercambiada con E_2 para obtener la nueva matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

Ya E_3 tiene su 2do elemento nulo así que se continúa con E4 haciendo la operación

$$\left[E_4 - \left(\frac{a_{42}}{a_{22}}\right)E_2\right] \rightarrow (E_4)$$

para obtener

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss

Finalmente realizamos la operación

$$\left[E_4 - \left(\frac{a_{43}}{a_{33}}\right)E_3\right] \rightarrow (E_4)$$

para obtener

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

La sustitución hacia atrás nos dará los valores buscados.

Eliminación de Gauss

Si no es posible obtener un pivote no nulo, dos posibilidades existen ya que el sistema tiene (a) infinitas soluciones ó, (b) ninguna solución.

Los algoritmos deben tener en cuenta estos posibles casos y dar opciones de salida que indiquen lo que está ocurriendo.

Eliminación de Gauss

ALGORITMO 6.1 **Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás**

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$

$$
\begin{aligned}
E_1: &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}\\
E_2: &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}\\
&\quad \vdots \\
E_n: &\quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
\end{aligned}
$$

ENTRADA número de incógnitas y ecuaciones n; matriz aumentada $A = (a_{ij})$, donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n + 1$.

SALIDA solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

Paso 1 Para $i = 1, \ldots, n - 1$ haga pasos 2-4. *(Proceso de eliminación.)*

Paso 2 Sea p el entero más pequeño con $i \leq p \leq n$ y $a_{pi} \neq 0$.
Si no puede encontrarse un entero p
entonces SALIDA ('no existe solución única');
PARE.

Paso 3 Si $p \neq i$ entonces realice $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$.

Paso 4 Para $j = i + 1, \ldots, n$ haga pasos 5 y 6.

Paso 5 Tome $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.

Paso 6 Realice $(E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow (E_j)$;

Paso 7 Si $a_{nn} = 0$ entonces SALIDA ('no existe solución única')
PARE.

Paso 8 Tome $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$. *(Comience la sustitución hacia atrás.)*

Paso 9 Para $i = n - 1, \ldots, 1$ tome $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] / a_{ii}$.

Paso 10 SALIDA $(x_1, \ldots, x_n)$; *(Procedimiento terminado exitosamente.)*
PARE.

Eliminación de Gauss

```
function x = eliGauss
% halla la solución de un sistema de ecuaciones lineales

n=4;
a(1,1)=1.; a(1,2)=-1.; a(1,3)=2.; a(1,4)=-1.; a(1,5)=-8.;
a(2,1)=2.; a(2,2)=-2.; a(2,3)=3.; a(2,4)=-3.; a(2,5)=-20.;
a(3,1)=1.; a(3,2)=1.; a(3,3)=1.; a(3,4)= 0.; a(3,5)=-2.;
a(4,1)=1.; a(4,2)=-1.; a(4,3)=4.; a(4,4)=3.; a(4,5)=4.;

for i=1:n-1
%...   calculo del entero mas pequeño
       p=i;
       while (a(p,i)==0)
         p=p+1;
       end
       if(p==(n+1))
         disp([' no existe solución única'])
         return
       end
%...   intercambiando (si es necesario) las filas i y la fila p
       if(p~=i)
         for j=1:n+1
           aux=a(i,j);
           a(i,j)=a(p,j);
           a(p,j)=aux;
         end
       end

      for j=i+1:n
        m=a(j,i)/a(i,i);
        for k=1:n+1
          a(j,k)=a(j,k)-m*a(i,k);
        end
      end
end
```

```
if(a(n,n)==0)then
        disp([' no existe solución única']);
        return
end

x(n)=a(n,n+1)/a(n,n);
disp([n x(n)]);

for i=n-1:-1:1
    sum=0.;
    for j=i+1:n
        sum=sum+a(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(a(i,n+1)-sum)/a(i,i);
    disp([i x(i)]);
end
```

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Uso de MatLab

Hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando MATLAB es muy sencillo.

Introduciendo la matriz A y el vector de términos independientes b tenemos que la solución del sistema de ecuaciones lineales es:

```
>> A=[1 -1 2 -1; 2 -2 3 -3;1 1 1 0;1 -1 4 3]

A =

     1    -1     2    -1
     2    -2     3    -3
     1     1     1     0
     1    -1     4     3

>> b=[-8; -20; -2; 4]

b =

    -8
   -20
    -2
     4

>> x=A\b

x =

   -7.0000
    3.0000
    2.0000
    2.0000

>>
```

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

Eliminación de Gauss-Jordan

Una variante del procedimiento anterior es conocida como el método de Gauss-Jordan. Veamos un ejemplo. Resolvamos el sistema

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9 \\
E_2 &: \quad x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1 \\
E_3 &: \quad -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6
\end{aligned}
$$

Construyamos la matriz ampliada

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & -7 & 4 & 9 \\
1 & 9 & -6 & 1 \\
-3 & 8 & 5 & 6
\end{array}\right]
$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Realizando la operación

$$\left((1/2)E_1\right) \to \left(E_1\right)$$

obtenemos la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 9 & -6 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Luego, realizamos las operaciones
$$\begin{cases} \left(E_2 - (1)E_1\right) \to \left(E_2\right) \\ \left(E_3 - (-3)E_1\right) \to \left(E_3\right) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 \end{array}\right]$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Normalice la segunda fila haciendo

$$\left(\frac{1}{\left(25/2\right)}E_2\right)\rightarrow\left(E_2\right)$$

para obtener

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 \end{array}\right]$$

Ahora, y aquí está la variación de Gauss-Jordan, realice las operaciones

$$\begin{cases} \left(E_1-\left(-7/2\right)E_2\right)\rightarrow\left(E_1\right) \\ \left(E_3-(-5/2)E_2\right)\rightarrow\left(E_3\right) \end{cases}$$

Eliminación de Gauss-Jordan

Obtenemos el resultado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 1 & -16/25 & -1/25 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6/25 & 88/25 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/5 \end{array}\right]$$

Continúe el procedimiento realizando

$$\begin{cases} \left(\left(\dfrac{1}{47/5}\right)E_3\right) \rightarrow (E_3) \\ \left(E_1 - (-6/25)E_3\right) \rightarrow (E_1) \\ \left(E_2 - (-16/25)E_3\right) \rightarrow (E_2) \end{cases}$$

Normalización de E_3

Nueva E_3

Llegamos entonces a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

La sustitución hacia atrás ahora da directamente

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 4$$

Eliminación de Gauss-Jordan

En general, los pasos dados en la Eliminación de Gauss-Jordan son:

(1) Normalizar la fila i haciendo

$$\left(\frac{1}{a_{ii}}E_i\right) \rightarrow (E_i)$$

(2) Sustraer, para todas las filas distintas de la i

$$\left(E_j - a_{ji}E_i\right) \rightarrow \left(E_j\right)$$

Nota: revisar el pivote para garantizar que no es nulo. En ese caso, proceder como con la Eliminación de Gauss clásica.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

Determinación de la matriz inversa

La matriz inversa se define como aquella que verifica que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Retomemos el procedimiento de Gauss-Jordan con nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned} E_1 &: \quad 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9 \\ E_2 &: \quad x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1 \\ E_3 &: -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6 \end{aligned} \qquad C = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & -6 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

El primer paso correspondió a la transformación

$$((1/2)E_1) \to (E_1)$$

Determinación de la matriz inversa

que se expresa en término de matrices elementales como

$$Q_1 C = C_1$$

con

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 9 & -6 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Los pasos siguientes en términos de operaciones por matrices elementales nos llevan a

$$\begin{cases} \left(E_2 - (1)E_1\right) \to \left(E_2\right) & \qquad S_1 C_1 = C_2 \\ \left(E_3 - (-3)E_1\right) \to \left(E_3\right) & \qquad S_2 C_2 = C_3 \end{cases}$$

Determinación de la matriz inversa

con S_1 dado por

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 9 & -6 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$S_1C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 1 & 9 & -6 & 1 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$S_1C_1 = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

Determinación de la matriz inversa

y S_2 dado por

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$S_2 C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ -3 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$S_2 C_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 \end{array}\right] = C_3$$

Determinación de la matriz inversa

El procedimiento seguido hasta ahora se puede resumir como una combinación de operaciones sucesivas con matrices elementales de primer y tercer tipo

$$S_2 S_1 Q_1 C = C_3$$

Los pasos siguientes se expresarán como

$$\left(\frac{1}{\left(25/2\right)} E_2 \right) \to \left(E_2\right) \qquad Q_2 C_3 = C_4 \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(E_1 - \left(-7/2\right) E_2\right) \to \left(E_1\right) & S_3 C_4 = C_5 \\ \left(E_3 - \left(-5/2\right) E_2\right) \to \left(E_3\right) & S_4 C_5 = C_6 \end{cases}$$

Determinación de la matriz inversa

Para llegar a

$$S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1 C = C_6$$

De manera similar los pasos siguientes se expresarán como

$$S_6 S_5 Q_3 S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1 C = C_9 = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[I \;\vdots\; x\right]$$

Escrito en notación compacta

$$EC = E\left[A \;\vdots\; b\right] = \left[I \;\vdots\; x\right] \longrightarrow EA = I$$

Teniendo entonces que E es la matriz inversa de A con

$$E = S_6 S_5 Q_3 S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1$$

Determinación de la matriz inversa

Luego, para calcular la inversa podemos proceder calculando el producto

$$A^{-1} = E = EI = S_6 S_5 Q_3 S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1 I$$

Esto se realiza fácilmente construyendo la matriz ampliada de la forma

$$C = \left[A \,\vdots\, b \,\vdots\, I \right]$$

Al hacer el producto por E obtendremos

$$EC = E\left[A \,\vdots\, b \,\vdots\, I \right] = \left[I \,\vdots\, x \,\vdots\, EI \right] = \left[I \,\vdots\, x \,\vdots\, A^{-1} \right]$$

Determinación de la matriz inversa

En nuestro ejemplo tendremos que la nueva matriz ampliada será

$$C = \left[A \,\vdots\, b \,\vdots\, I\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y realizando exactamente las mismas operaciones sobre las filas que en el caso de la eliminación de Gauss-Jordan obtenemos

$$\left[I \,\vdots\, x \,\vdots\, A^{-1}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

Determinación de la matriz inversa

Luego, la matriz inversa viene dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{bmatrix}$$

Desde un punto de vista práctico, a la hora de hacer los cálculos deben tomarse en cuenta los siguientes aspectos:

•Seguir los mismos pasos del método de eliminación de Gauss-Jordan con la nueva matriz ampliada incluyendo la identidad

•Construir la subrutina de manera que considere si se desea calcular o no la inversa (índice de control)

Determinación de la matriz inversa

Por otra parte, el determinante puede calcularse a partir de

$$A^{-1} = E = EI = S_6 S_5 Q_3 S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1 I$$

ya que

$$\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(EI\right) = \det\left(S_6 S_5 Q_3 S_4 S_3 Q_2 S_2 S_1 Q_1 I\right)$$

Utilizando las propiedades de las matrices elementales obtenemos

$$\det\left(A^{-1}\right) = q_3 q_2 q_1$$

que corresponde a los factores de normalización. Luego, el determinante de la matriz A es

$$\det\left(A\right) = \frac{1}{q_3 q_2 q_1}$$

Determinación de la matriz inversa

En nuestro ejemplo anterior

$$\det(A) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{25}\right)\left(\frac{5}{47}\right)} = 235$$

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 **Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel**.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de las sustituciones sucesivas

2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de Newton-Raphson.

Métodos Iterativos

En el caso de grandes sistemas de ecuaciones, tales como los que aparecen en la resolución por diferencias finitas de EDO y de Ecuaciones en derivadas parciales los métodos directos pueden ser poco eficientes (tiempo, almacenamiento y cantidad de elementos nulos).

Los métodos iterativos consisten en generar, a partir de una "adivinanza" inicial, una sucesión de aproximaciones a la solución.

En el método de Jacobi, del sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

se despeja cada variable x_i de la ecuación i de manera que

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Luego, partiendo de una aproximación inicial "adivinada"

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ . \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

construimos la secuencia

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(0)}}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

El procedimiento se repite de manera secuencial

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

hasta verificar algún criterio de convergencia. Un criterio usual lo constituye la norma L_2

$$L = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|^2}{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k+1)} \right|^2}$$

exigiendole una cota máxima a L.

Ejemplo. Resolver utilizando el método de Jacobi el sistema

$$E_1: \quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$E_2: \quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$E_3: \quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$

$$E_4: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

Las incógnitas se despejan para dar

$$x_1 = \frac{6 + x_2 - 2x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{25 + x_1 + x_3 - 3x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{-11 - 2x_1 + x_2 + x_4}{10}$$

$$x_4 = \frac{15 - 3x_2 + x_3}{8}$$

Escojamos como aproximación inicial a

$$x^{(0)} = [0,0,0,0]^t$$

Luego, la primera aproximación será

$$x_1^{(1)} = \frac{6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{25 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}}{11} = \frac{25}{11}$$

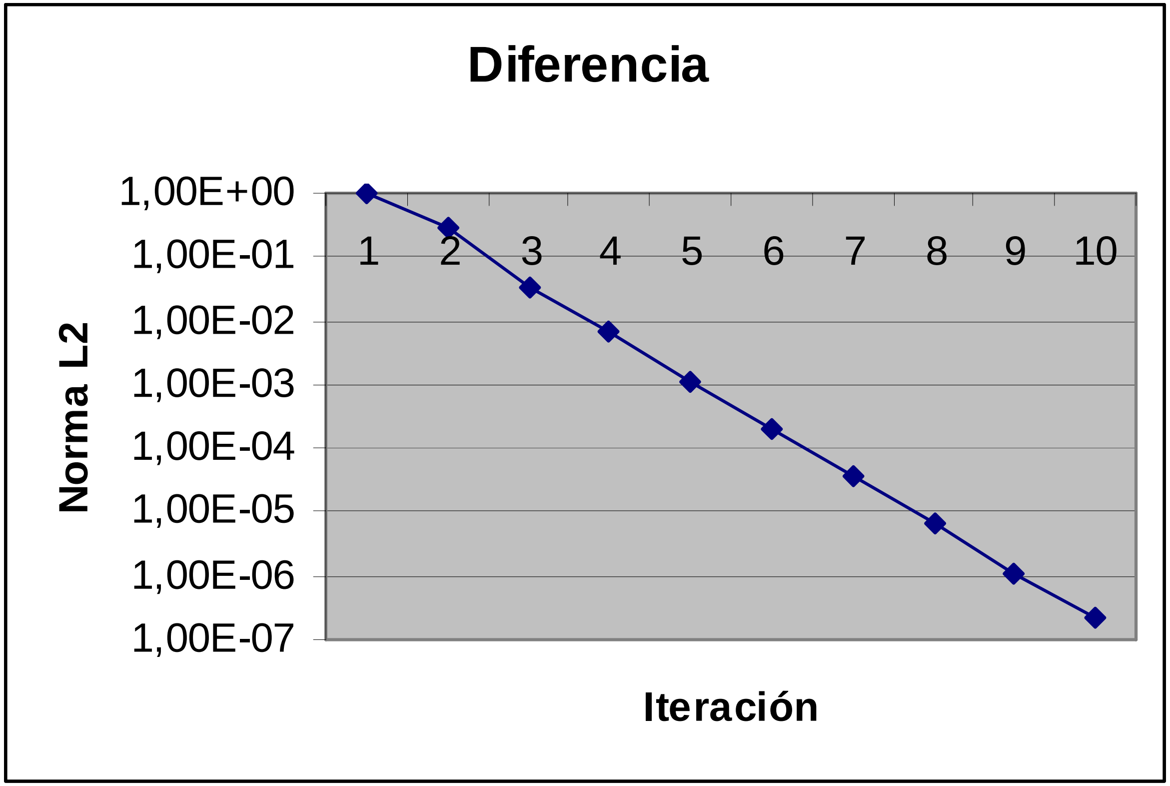
$$x_3^{(1)} = \frac{-11 - 2x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + x_4^{(0)}}{10} = -\frac{11}{10}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{15 - 3x_2 + x_3}{8} = \frac{15}{8}$$

Continuando el proceso de manera iterativa obtenemos

Métodos Iterativos

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,6000	1,0473	0,9360	1,0167	0,9913	1,0050	1,0001	1,0025	1,0016	1,0020
2	0	2,2727	1,7159	2,0518	1,9539	2,0106	1,9920	2,0018	1,9983	2,0000	1,9994
3	0	-1,1000	-0,8223	-1,0574	-0,9794	-1,0195	-1,0045	-1,0115	-1,0087	-1,0099	-1,0094
4	0	1,8750	0,8852	1,1288	0,9734	1,0199	0,9936	1,0024	0,9979	0,9995	0,9988
Dif =	1,00E+00	2,85E-01	3,21E-02	6,85E-03	1,07E-03	2,08E-04	3,50E-05	6,57E-06	1,14E-06	2,10E-07	



Métodos Iterativos

El método de Gauss-Seidel, las aproximaciones se van utilizando a medida que se generan. Esto es, una vez calculados los valores de las aproximaciones $x_i^{(k+1)}$ en la ecuación i+1 se sustituyen estos valores junto con los de la iteración anterior

$$x_i^{(k)}$$

para obtener como aproximación

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,...,n$$

Ejemplo: Resuelva, utilizando el método de Gauss-Seidel el sistema

$$E_1: \quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$E_2: \quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$E_3: \quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11$$

$$E_4: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

Nuevamente expresamos cada incógnita como

$$x_1 = \frac{6 + x_2 - 2x_3}{10} \qquad x_3 = \frac{-11 - 2x_1 + x_2 + x_4}{10}$$

$$x_2 = \frac{25 + x_1 + x_3 - 3x_4}{11} \qquad x_4 = \frac{15 - 3x_2 + x_3}{8}$$

Hallamos la 1era aproximación a $x_{1,}$ partiendo de $x^{(0)}=(0,0,0,0)^t$

$$x_1^{(1)} = \frac{6 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}}{10} = \frac{6}{10}$$

Para el cálculo de x_2 usamos

$$x_2 = \frac{25 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)} - 3x_4^{(0)}}{11} = \frac{25 + 6/10 + 0 - 0}{11} = \frac{256}{110}$$

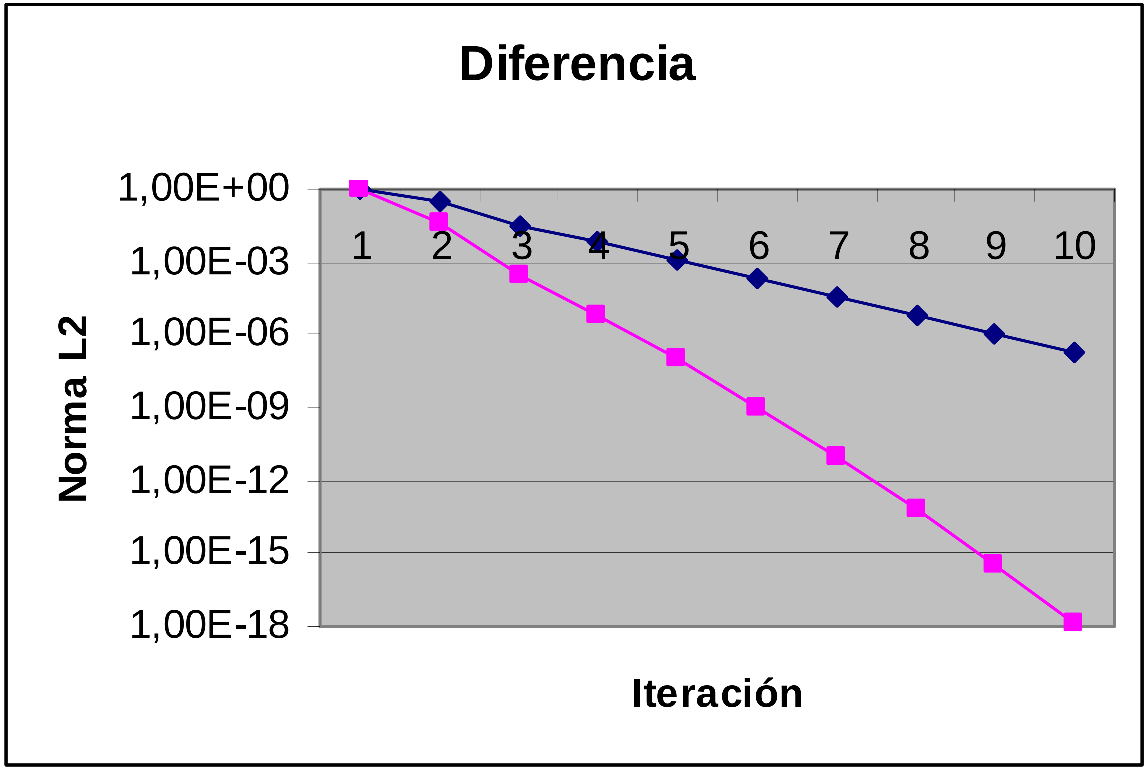
De manera similar

$$x_3^{(1)} = \frac{-11 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(0)}}{10} = \frac{-11 - 2\left(6/10\right) + (256/10) + (0)}{10}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{15 - 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}}{8} = \frac{15 - 3\left(256/10\right) + (134/100)}{8} = \frac{-6046}{8}$$

Continuando obtenemos

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,6000	1,0302	1,0082	1,0027	1,0020	1,0019	1,0019	1,0019	1,0019	1,0019
2	0	2,3273	2,0369	2,0032	1,9999	1,9996	1,9996	1,9996	1,9996	1,9996	1,9996
3	0	-0,9873	-1,0224	-1,0119	-1,0099	-1,0096	-1,0096	-1,0096	-1,0096	-1,0096	-1,0096
4	0	0,8789	0,9833	0,9973	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990	0,9990
Dif =	1,00E+00	3,90E-02	2,73E-04	6,77E-06	1,03E-07	1,12E-09	9,61E-12	6,59E-14	3,51E-16	1,32E-18	



Métodos Iterativos

No siempre el método de Gauss-Seidel converge mas rápido que el de Jacobi, pero en general, si lo hace. Es posible probar que si el valor absoluto del elemento de la diagonal es mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos fuera de la diagonal (matriz diagonalmente dominante) esto será suficiente para garantizar la convergencia.

Esto debe ser tomado en cuenta a la hora de preparar programas de cálculo.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de las sustituciones sucesivas

2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de Newton-Raphson.

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: MSS

En el caso de sistemas no lineales, deseamos encontrar la solución de

$$f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0$$

el cual consiste en n funciones reales de n variables reales.

Uno de los métodos mas utilizados es el de las sustituciones sucesivas (tipo punto fijo). En este método, las funciones f_i se reescriben de manera que

$$f_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i = F_i(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

para utilizar luego un esquema de iteraciones tal como el utilizado en los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel para sistemas lineales.

Ejemplo: Considere la solución del sistema no lineal

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - {}^{1}\!/_{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin(x_3) + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Las funciones f_i se reescriben de manera que

$$x_1 = {}^{\cos(x_2 x_3)}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{6}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06}}{9} - 0.1$$

$$x_3 = -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: MSS

Luego, iteramos sobre las ecuaciones

$$x_1^{(k+1)} = \cos\left(x_2^{(k)} x_3^{(k)}\right) / 3 + 1/6$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + sin(x_3^{(k)}) + 1.06}}{9} - 0.1$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k)} x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

Si partimos de la aproximación inicial $x^{(0)}=(0,0,0)$ tenemos

k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0,50000000	0,49999053	0,50000000	0,50000000	0,50000000	0,50000000	0,50000000
2	0	0,01439589	0,00000000	0,00001859	0,00000000	0,00000002	0,00000000	0,00000000
3	0	-0,52359878	-0,52324017	-0,52359878	-0,52359831	-0,52359878	-0,52359877	-0,52359878
Dif=		0,52436292	0,00020737	1,2903E-07	3,4566E-10	2,1652E-13	6,1734E-16	3,867E-19
Norma L2 =		1	0,00039592	2,4617E-07	6,5946E-10	4,1308E-13	1,1778E-15	7,3775E-19

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: MSS

En la variante de Gauss-Seidel obtenemos

$$x_1^{(k+1)} = \cos\left(x_2^{(k)} x_3^{(k)}\right)/3 + 1/6$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\sqrt{\left(x_1^{(k+1)}\right)^2 + sin(x_3^{(k)}) + 1.06}}{9} - 0.1$$

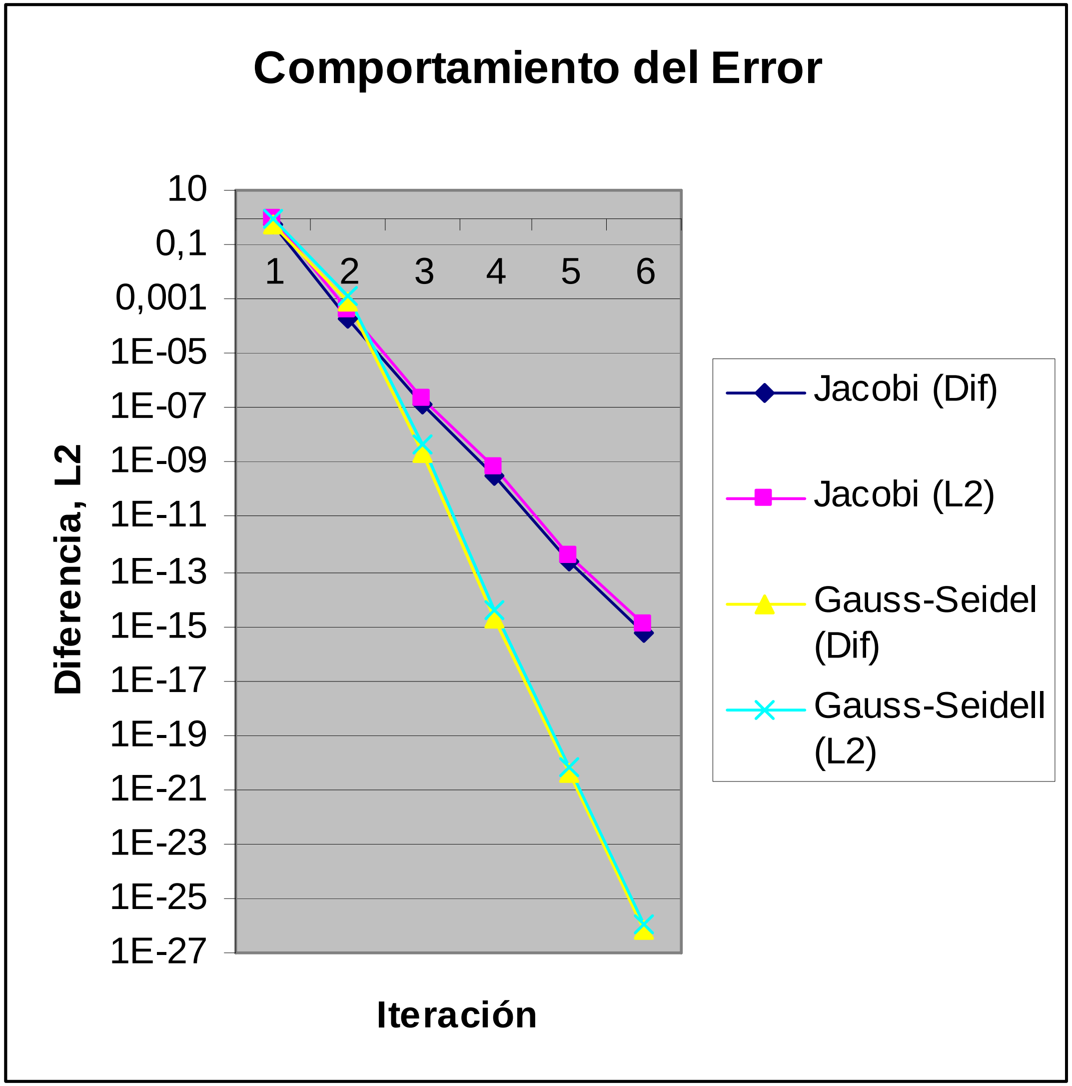
$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k+1)} x_2^{(k+1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

Si partimos de la aproximación inicial $x^{(0)}=(0,0,0)$ tenemos

k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0,50000000	0,49996635	0,50000000	0,50000000	0,50000000	0,50000000	0,50000000
2	0	0,02717248	0,00003399	0,00000005	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
3	0	-0,52292406	-0,52359793	-0,52359877	-0,52359878	-0,52359878	-0,52359878	-0,52359878
Dif=		0,52418791	0,00073695	2,2855E-09	2,0591E-15	3,6779E-21	6,568E-27	1,2326E-32
Norma L2 =		1	0,00140607	4,3603E-09	3,9285E-15	7,0167E-21	1,2531E-26	2,3516E-32

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: MSS

Comparando ambas versiones del método tenemos



Métodos Iterativos para Ec. No lineales: MSS

Las condiciones que garantizan la convergencia de estos métodos están ligadas con la naturaleza de las funciones F_i. Si éstas son continúas en una región del sub-espacio de vectores $(x_1,x_2,...,x_n)$ donde los x_i pertenecen a un intervalo definido (a_i,b_i) y las derivadas parciales de las F_i también son continuas y acotadas en ese sub espacio, entonces las funciones F_i tienen un punto fijo en dicho sub-espacio.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de las sustituciones sucesivas

2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales: método de Newton-Raphson.

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

No siempre es posible despejar la variable de cada ecuación de manera que el método de las sustituciones sucesivas converja a la solución. Una opción distinta la constituye el método de Newton-Rawson.

En el caso de ecuaciones de una variable, este método se expresa como

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f\left(x^{(n)}\right)}{f'\left(x^{(n)}\right)}$$

pudiendo ser reescrito como

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

y el problema se remite a conseguir los puntos fijos de la función g(x).

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Este método puede aún escribirse como

$$g(x) = x - \phi(x) f(x)$$

donde la nueva función se expresa como

$$\phi(x) = \left[f'(x) \right]^{-1}$$

En el caso de un problema de varias incógnitas, este se podría expresar como

$$\{G(x)\} = \{x\} - [A(x)]^{-1} \{F(x)\}$$

siendo ahora

$$\{G(x)\} = \{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

$$\{F(x)\} = F\left(f_1(x_i), f_2(x_i), \ldots, f_n(x_i) \right)^{\mathrm{t}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$[A(x)]^{-1} = [b_{ij}] \propto \frac{\partial f_k}{\partial x_l}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Es posible mostrar que la matriz A puede escogerse igual a la matriz Jacobiana definida como

$$J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Luego, la función G(x) se puede definir como

$$\{G(x)\} = \{x\} - [J(x)]^{-1}\{F(x)\}$$

en perfecta correspondencia con el método de punto fijo para una variable.

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Entonces, el procedimiento de iteración se realizará según

$$\{x\}^{(k+1)} = \left\{G\left(x^{(k)}\right)\right\} = \{x\}^{(k)} - \left[J\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1}\left\{F\left(x^{(k)}\right)\right\}$$

Este es el método de Newton para sistemas no lineales.

En general, el 2do término de la derecha se estima a partir de la resolución del sistema lineal

$$\left[J\left(x^{(k)}\right)\right]\left\{y^{(k)}\right\} = \left\{F\left(x^{(k)}\right)\right\}$$

para obtener luego

$$\{x\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k)} - \{y\}^{(k)}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Ejemplo: Resolver utilizando el método de Newton el sistema de ecuaciones

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin(x_3) + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Las funciones f_i vienen dadas por

$$f_1(x) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin(x_3) + 1.06$$

$$f_3(x) = e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Luego, el vector F(x) se construye como

$$F(x) = \begin{bmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin(x_3) + 1.06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobiana se construye a partir de

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -x_2 e^{-x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_3 sin(x_2 x_3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -162(x_2 + 0.1) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -x_1 e^{-x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = x_2 sin(x_2 x_3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \cos(x_3) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 20$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

quedando expresada como

$$J=\begin{bmatrix} 3 & x_3 sin(x_2 x_3) & x_2 sin(x_2 x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos(x_3) \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

Las iteraciones se realizan a partir de

$$J^{(0)}=\begin{bmatrix} 3 & x_3^{(0)} sin\left(x_2^{(0)} x_3^{(0)}\right) & x_2^{(0)} sin\left(x_2^{(0)} x_3^{(0)}\right) \\ 2x_1^{(0)} & -162\left(x_2^{(0)}+0.1\right) & \cos(x_3^{(0)}) \\ -x_2^{(0)} e^{-x_1 x_2^{(0)}} & -x_1^{(0)} e^{-x_1 x_2^{(0)}} & 20 \end{bmatrix}$$

$$F^{(0)}(x)=\begin{bmatrix} 3x_1^{(0)}-\cos\left(x_2^{(0)} x_3^{(0)}\right)-1/2 \\ {x_1^{(0)}}^2-81\left(x_2^{(0)}+0.1\right)^2+sin(x_3^{(0)})+1.06 \\ e^{-x_1^{(0)} x_2^{(0)}}+20x_3^{(0)}+\dfrac{10\pi-3}{3} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Si como aproximación inicial de x tomamos (0,0,0) tendremos

$$J^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -16.2 & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad F^{(0)}(x) = \begin{bmatrix} 0-1-\frac{1}{2} \\ 0-0.81+0+1.06 \\ 1+0+\dfrac{10\pi-3}{3} \end{bmatrix}$$

3.00000	0.00000	0.00000
0.00000	-16.20000	1.00000
0.00000	0.00000	20.00000

-1.50000
0.25000
10.47198

Luego, la primera iteración la obtendremos al hacer

$$x^{(1)} = \{x\}^{(0)} - \{y\}^{(0)}$$

con y solución de

$$J\left(x^{(0)}\right)\left\{y^{(0)}\right\} = F\left(x^{(0)}\right)$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

x1	x2	x3	Dif Iter Anterior
0.50000000	-0.01688882	-0.52359877	1.00000000

Continuando las iteraciones obtenemos

x1	x2	x3	Dif Iter Anterior
0.50000000	-0.01688882	-0.52359877	1.00000000
0.50001569	0.00172003	-0.52355365	0.00066070
0.50000013	0.00001456	-0.52359841	0.00000555
0.50000000	0.00000000	-0.52359879	0.00000000
0.50000000	-0.00000001	-0.52359879	0.00000000

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Algunos detalles computacionales

```
n=3
x1=0.
x2=0.
x3=0.

x(1)=x1
x(2)=x2
x(3)=x3

niter=5

do k=1,niter

! ... Construyendo el vector F(x) ...
f(1)=f1(x1,x2,x3)
f(2)=f2(x1,x2,x3)
f(3)=f3(x1,x2,x3)
```

Entrada de aproximación inicial

Cálculo de las componentes de f

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

```
! ... Construyendo la matriz Jacobiana
        J(1,1)= df1dx1(x1,x2,x3)
        J(1,2)= df1dx2(x1,x2,x3)
        J(1,3)= df1dx3(x1,x2,x3)
        J(2,1)= df2dx1(x1,x2,x3)
        J(2,2)= df2dx2(x1,x2,x3)
        J(2,3)= df2dx3(x1,x2,x3)
        J(3,1)= df3dx1(x1,x2,x3)
        J(3,2)= df3dx2(x1,x2,x3)
        J(3,3)= df3dx3(x1,x2,x3)
! ... Matriz ampliada
        J(1,4)=f(1)
        J(2,4)=f(2)
        J(3,4)=f(3)
!...  Resolviendo J*y=F
        call GaussJordan(n,J,y)

!...   Iteración ...
```

Cálculo de la matriz Jacobiana

Matriz ampliada

Solución del sistema Jy=F

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

```
!...  Iteración ...

            do i=1,n
              x(i) = x(i) - y(i)
            enddo

   suma1=0.
   suma2=0.
   do i=1,n
              suma1=suma1+(x1-x(1))**2.+(x2-x(2))**2.+(x3-x(3))**2.
              suma2=suma2+(x(1))**2.+(x(2))**2.+(x(3))**2.
   enddo
   dif=suma1/suma2
            x1=x(1)
            x2=x(2)
            x3=x(3)
enddo
```

Probando la convergencia

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR


```
function f1(x1,x2,x3)
double precision x1,x2,x3
f1=3.*x1-cos(x2*x3)-0.5
end

function df1dx1(x1,x2,x3)
double precision x1,x2,x3
df1dx1=3.
end
```

Definiendo las funciones para cada matriz

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

MATLAB posee un comando para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Para ello debe crear un archivo .m con las funciones no lineales y luego usar el comando fzero. Veamos la secuencia de pasos.

En nuestro ejemplo:

```
function F = myfun(x)
F = [3*x(1) - cos(x(2)*x(3)) - 1/2;
     x(1)^2 - 81*((x(2)+0.1)^2) + sin(x(3)) + 1.06 ;
     exp(-x(1)*x(2))+ 20*x(3)+(10*pi-3)/3];
```

Luego define el punto de partida

```
>> x0 = [0; 0; 0];
>> [x,fval] = fsolve(@myfun,x0)
```

Para obtener

```
x =
   0.5000
    0.0000
   -0.5236

fval =
1.0e-007 *
    0.0003
   -0.1721
    0.0003
```

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

2.1 Introducción

2.2 Notación, Matrices y Conceptos Preliminares

2.3 Eliminación de Gauss

2.4 Eliminación de Gauss-Jordan.

2.5 Determinación de la matriz inversa.

2.6 Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.7 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales:
método de las sustituciones sucesivas

**2.8 Métodos iterativos para ecuaciones no-lineales:
método de Newton-Raphson (Apéndice)**

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

La expresión de G(x) en los términos expuestos requiere del siguiente teorema.

Teorema: Supongamos que p es una solución de $G(x)=x$ para alguna función $G=(g_1,g_2,...,g_n)^t$ que mapea R_n en R_n. Si existe un número $\delta>0$ con la propiedad de que

(i) $\partial g_i/\partial x_j$ sea continua en $N_\delta=\{x / |x-p| < \delta\}$ para toda i=1,2,...,n;

(ii) $\partial^2 g_i/\partial x_j \partial x_k$ sea continua y $|\partial^2 g_i/\partial x_j \partial x_k| \leq M$ para alguna constante M siempre que $x \in N_\delta$ para toda i,j,k=1,2,...,n

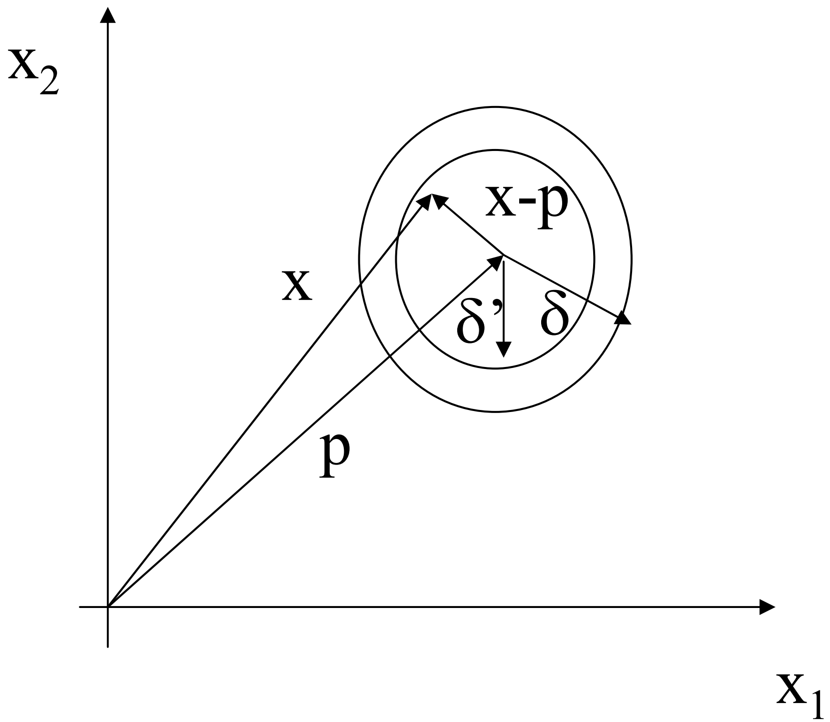
(iii) $\partial g_i/\partial x_k (p) = 0$ para toda i,k=1,2,...,n

entonces existe un número $\delta' \leq \delta$ tal que la sucesión generada por

$$x^{(k+1)} = G\left(x^{(k)}\right)$$

converge cuadráticamente a p para cualquier elección de $x^{(0)}$ a condición que $|x^{(0)}-p| < \delta'$.

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR



Representación de las condiciones del teorema anterior para n=2

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Puesto que x es un vector con n componentes, la ecuación

$$G(x)=\{x\}-[A(x)]^{-1}F(x)$$

corresponde a n ecuaciones del tipo

$$g_i(x)=x_i-\left\{[A(x)]^{-1}F(x)\right\}_i \qquad g_i(x)=x_i-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(x)$$

siendo ahora

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_k}=\begin{cases}1-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}(x)}{\partial x_k}f_j(x)+\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k}b_{ij}(x)\right) & i=k\\ -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}(x)}{\partial x_k}f_j(x)+\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k}b_{ij}(x)\right) & i\neq k\end{cases}$$

La condición (iii) expresada como

$$\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k}=0$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

nos lleva a

$$0=\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k}=\begin{cases}1-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}(p)}{\partial x_k}f_j(p)+\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k}b_{ij}(p)\right) & i=k\\ -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{ij}(p)}{\partial x_k}f_j(p)+\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k}b_{ij}(p)\right) & i\neq k\end{cases}$$

Pero como p es la solución de $f_j(x)=0$, entonces $f_j(p)=0$, luego la ec. anterior se reduce a las ecuaciones

$$1-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k}b_{ij}(p)\right)=0 \qquad i=k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k}b_{ij}(p)\right)=0 \qquad i\neq k$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

que se reducen a

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k} b_{ij}(p)\right)=1 \qquad i=k$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_k} b_{ij}(p)\right)=0 \qquad i\neq k$$

Definiendo la matriz Jacobiana J como

$$J(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & .... & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos para Ec. No lineales: NR

Con esta definición las ecuaciones se escriben como

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}(p)J_{jk}\right)=\delta_{ik} \qquad i=k$$

donde se ha utilizado la delta de Kronecker δ_{ij} (0 para i≠j, 1 si i=j).

Luego,

$$A(p)^{-1}J(p)=I$$

Podemos concluir entonces que

$$A(p)=J(p)$$

En consecuencia una elección adecuada de A viene dada por

$$A(x)=J(x)$$

ALGORITMOS

Eliminación Gaussiana

Eliminación de Gauss-Jordan (con cálculo de matriz inversa)

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Métodos de las sustituciones sucesivas para ecuaciones no-lineales

Métodos de Newton-Rawson para ecuaciones no-lineales

MECÁNICA COMPUTACIONAL I

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones